Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 29. јун 2023.

МАТЕМАТИКА (60)

1. Израчунати вредност израза $\left(x+x^{-1}+y+y^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ за $x=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}$ и $y=\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}$.

2. У једначини $(k-1)x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ одредити вредност реалног параметра k тако да њена решења x_1 и x_2 задовољавају услов $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=2$.

3. Решити једначину $5^x+5^{3-x}=30$.

4. Решити једначину $2\log_3\sqrt{t-2}+\log_9(2t-3)^2=\log_2(\log_2 16)-2\log_3(\log_3 27)$.

5. Доказати да је $(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)^{-1}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, а затим решити једначину $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Решења:

1. Приметимо да је $x=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}\cdot\dfrac{4+\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}=\dfrac{4+\sqrt{15}}{4^2-15}=4+\sqrt{15}=y^{-1}$. Аналогно добијамо да је $y=4-\sqrt{15}=x^{-1}$. Стога је $(x+x^{-1}+y+y^{-1})^{\frac{1}{2}}=\left(2(4+\sqrt{15}+4-\sqrt{15})\right)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}=4$.

2. Примењујући Вијетове формуле на наведену квадратну једначину имамо
$$x_1+x_2=-\frac{k-5}{k-1}=\frac{5-k}{k-1},\ x_1x_2=-\frac{k+2}{k-1}=\frac{-k-2}{k-1}.$$
Даље је $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{\frac{5-k}{k-1}}{\frac{-k-2}{k-1}}=\dfrac{5-k}{-k-2}$, стога нам још остаје да решимо једначину $\dfrac{5-k}{-k-2}=2$ одакле следи $5-k=2(-k-2)=-2k-4\leftrightarrow -k+2k=-4-5$ и коначно $k=-9$.

3. Једначину трансформишемо користећи особине експоненцијалне функције: $5^x+\dfrac{5^3}{5^x}=30$ па ћемо, након смене $5^x=t$, имати једноставнију једначину $t+\dfrac{125}{t}=30$ односно, након множења са t и сређивања, $t^2-30t+125=0$. Ова једначина има два решења, $t_1=5$ и $t_2=25$ одакле добијамо два решења полазне једначине $5^x=5\rightarrow x_1=1$, $5^x=25\rightarrow x_2=2$.

4. Рачунамо прво $\log_2 16 = 4, \log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2, \log_3 27 = 3, \log_3(\log_3 27) = 1$, па је десна страна једначине $\log_2(\log_2 16) - 2\log_3(\log_3 27) = 0$. Једначина има смисла за $t-2>0, 2t-3>0 \leftrightarrow t>2$.

   У наставку трансформишемо леву страну једначине:

$$2\log_3\sqrt{t-2} = 2\log_3(t-2)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2}\log_3(t-2) = \log_3(t-2),$$

$$\log_9(2t-3)^2 = \log_{3^2}(2t-3)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\log_3(2t-3) = \log_3(2t-3).$$

   Па имамо

$$\log_3(t-2) + \log_3(2t-3) = 0 \leftrightarrow \log_3\big((t-2)(2t-3)\big) = 0,$$

   одавде добијамо квадратну једначину $(t-2)(2t-3) = 2t^2-7t+6 = 3^0$, односно $2t^2-7t+5 = 0$ која има решења $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = 1$ од којих само прво прихватамо, с обзиром на услове једначине.

5. Рачунамо:

$$(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)^{-1} = \Big(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\Big)^{-1} = \Big(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x\sin x}\Big)^{-1} = \frac{\cos x\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x.$$

   Једначина се своди на $(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и, најзад $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ чија су решења $2x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$, односно $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 29. јун 2023.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. Упростити израз $\Big((2-\dfrac{a^2+b^2}{ab}\Big):\big(2+\dfrac{a^2+b^2}{ab})\Big)^{-1}\cdot(\dfrac{a-b}{a+b})^2$.

2. У једначини $(k-1)x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ одредити вредност реалног параметра k тако да њена решења x_1 и x_2 задовољавају услов $x_1^2+x_2^2=3$.

3. Решити једначину $\log_9(2t-3)^2+2\log_3\sqrt{t-2}=3\log_5 25+2\log_3 27-4\log_2 8$.

Решења:

1. Имамо да је

$$(2-\frac{a^2+b^2}{ab}):(2+\frac{a^2+b^2}{ab})=\frac{2ab-a^2-b^2}{ab}:\frac{2ab+a^2+b^2}{ab}=\frac{-(a-b)^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2}$$
$$=-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Одавде је

$$\Big((2-\frac{a^2+b^2}{ab}\Big):(2+\frac{a^2+b^2}{ab})\Big)^{-1}=\big(-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\big)^{-1}=-\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2},$$

па је

$$\Big((2-\frac{a^2+b^2}{ab}\Big):(2+\frac{a^2+b^2}{ab})\Big)^{-1}\cdot(\frac{a-b}{a+b})^2=-\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\cdot(\frac{a-b}{a+b})^2=-1.$$

2. Примењујући Вијетове формуле на наведену квадратну једначину имамо

$$x_1+x_2=-\frac{k-5}{k-1}=\frac{5-k}{k-1},\ x_1x_2=-\frac{k+2}{k-1}=\frac{-k-2}{k-1}.$$

Даље је $3=x_1^2+x_2^2\pm 2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\dfrac{5-k}{k-1}\right)^2-2\dfrac{-k-2}{k-1}$. Сређивањем се добија $3=\dfrac{(5-k)^2+2(k+2)(k-1)}{(k-1)^2}=\dfrac{3k^2-8k+21}{(k-1)^2}$, односно $3(k^2-2k+1)=3k^2-8k+21$. Остаје да решимо линеарну једначину $2k=18$,па је решење $k=9$.

3. Прво рачунамо $3\log_5 25 + 2\log_3 27 - 4\log_2 8 = 3\cdot 2 + 2\cdot 3 - 4\cdot 3 = 0$. Једначина има смисла за $2t-3>0$ и $t-2>0$, дакле за $t>2$. Имамо да је

$$\log_9(2t-3)^2 = 2\log_{3^2}(2t-3) = 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3(2t-3) = \log_3(2t-3),$$

$$2\log_3\sqrt{t-2} = 2\cdot\frac{1}{2}\log_3(t-2) = \log_3(t-2).$$

Одавде имамо

$$\log_3(t-2) + \log_3(2t-3) = 0 \leftrightarrow \log_3\big((t-2)(2t-3)\big) = 0,$$

одавде добијамо квадратну једначину $(t-2)(2t-3) = 2t^2-7t+6 = 3^0$, односно $2t^2-7t+5 = 0$ која има решења $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = 1$ од којих само прво прихватамо, с обзиром на услове једначине.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 29. јун 2023.

МАТЕМАТИКА (30, ИЗЖС)

1. Израчунати вредност израза $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{3\cdot 32^{\frac{1}{2}}}{2^{-1}}-\left(\dfrac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{3}}\cdot 18^{\frac{1}{2}}\right)$

2. Решити дату квадратну једначину $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{3(x-1)}{4}=\dfrac{(x-3)^2}{6}+\dfrac{27}{12}$.

3. Решити једначину $3\log_5 25+2\log_3 27-4\log_2 x=0$.

Решења:

1.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3\cdot 32^{\frac{1}{2}}}{2^{-1}}-\left(\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{3}}\cdot 18^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3\cdot\sqrt{32}}{\frac{1}{2}}-(50)^{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt{18}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2-\sqrt{25\cdot 2}-3\cdot\sqrt{9\cdot 2}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(24\sqrt{2}-5\sqrt{2}-3\cdot 3\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(24\sqrt{2}-5\sqrt{2}-9\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 10\sqrt{2}\\
&= 5
\end{aligned}$$

2. Множењем једначине са 12, добија се $4x+4+9x-9=2(x^2-6x+9)+27$, а сабирањем сличних чланова $2x^2-25x+50=0$. Применом квадратне формуле $x_{1,2}=\dfrac{25\pm\sqrt{625-4\cdot 2\cdot 50}}{4}$ добијају се решења $x_1=10$ и $x_2=\dfrac{5}{2}$.

3. Израчунавањем логаритама прва два сабирка се могу другачије записати, па се добија $3\cdot 2+2\cdot 3-4\log_2 x=0$, односно $12=4\log_2 x$, одакле је $\log_2 x=3$, па је решење $x=2^3=8$.